

ЛЕКЦИЯ 8

§ 8. Траекториялардың шектік тәртібі

Автономдық жүйенің

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \quad (1)$$

бастапқы

$$\varphi(0, x_0) = x_0, \quad x_0 \in D \subset R^n \quad (2)$$

шартын қанағаттандыратын $x = \varphi(t, x_0)$ шешімін t айнымалысының өсу (немесе кему) бағытында ұзартқанда екі жағдайдың біреуі орындалатыны айқын: не шешім $0 \leq t < \infty$ (немесе $-\infty < t \leq 0$) аралығына ұзартылады, не t айнымалысы бір ақырлы мәнге ұмтылғанда, $\varphi(t, x_0)$ шексіздікке ұмтылады, яғни фазалық траектория шексіздікке кетеді. Біз бірінші жағдай орындалады деп есептейміз. Шынында да (1) жүйенің траекторияларының тәртібін тексергенде, бұлайша жору жалпы пайымдауларды шектемейді. Себебі (1) жүйенің орнына

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \cdot r(x) \quad (3)$$

автономиялық жүйесін қарастыруға болады. Мұнда

$$r(x) := \frac{1}{\sqrt{1 + f_1^2 + \dots + f_n^2}}$$

Қозғалысы (3) жүйемен анықталатын нүктелердің жылдамдықтары барлық кезде бірден аспайды. Сондықтан нүкте ақырлы уақытта шексіздікке кете алмайды, ал (1) жүйе мен (3) жүйенің фазалық траекториялары ортақ. (1) жүйенің $(-\infty; +\infty)$ аралығында анықталған $x = \varphi(t)$ шешімін және оған сәйкес келетін γ траекториясын қарастырайық. Траекторияның $x = \varphi(t)$ вектор – функциясымен $0 \leq t < \infty$ мәнінде анықталатын бөлігін *оң жарты траектория*, ал $-\infty < t \leq 0$ мәнінде анықталатын бөлігін *теріс жарты траектория* деп атайды. Егер $\{t_n\}$ тізбегі бар болып, $t_n \rightarrow \infty$ болғанда, $\varphi(t_n) \rightarrow x^*$ болса, онда x^* нүктесі γ траекториясының $(\varphi(t))$ шешімінің $t \rightarrow +\infty$ кездегі *шектік нүктесі* деп аталады. Осындай нүктелердің жиынтығы γ *траекториясының* $t \rightarrow +\infty$ кездегі *шектік жиыны* деп аталады. Ал $t \rightarrow -\infty$ кездегі *шектік нүкте* мен *шектік жиынның* ұғымы да дәл осылайша енгізіледі. Көбінесе $t \rightarrow +\infty$ кездегі шектік нүкте мен шектік жиын сәйкес ω – *шектік нүкте* мен ω – *шектік жиын* деп, ал $t \rightarrow -\infty$ кездегі шектік нүкте мен шектік жиын сәйкес α – *шектік нүкте*, α – *шектік жиын* деп аталады.

Егер қандай да бір цикл (тұйық траектория) өзінен өзгеше басқа бір траекторияның $t \rightarrow +\infty$ немесе $t \rightarrow -\infty$ кездегі шектік жиыны болса, онда оны *шектік цикл* деп атайды.

Тыныштық нүктесі $t \rightarrow +\infty$, сондай-ақ $t \rightarrow -\infty$ болған кезде де ол өзінің жалғыз ғана шектік нүктесі болатыны айқын. Дәл сол сияқты кез келген тұйық траектория да $t \rightarrow +\infty$ немесе $t \rightarrow -\infty$ кезде де өзінің шектік жиыны болады. Әлбетте, тұйық емес траекториялардың шектік жиындарын білу өте маңызды, себебі олар траекторияның $|t_n| \rightarrow \infty$ кездегі тәртібін анықтайды. Шектік жиындардың қарапайым қасиеттеріне тоқталайық. Анықтық үшін $t \rightarrow +\infty$ кездегі шектік жиындарды қарастырайық. Ол қасиеттер әлбетте $t \rightarrow -\infty$ кездегі шектік жиындар үшін де орындалады.

1°. Шектік жиын тұйық, яғни өзінің барлық шектік нүктелерін өзінде ұстайды.

Д Э Л Е Л Д Е У I. $x = \varphi(t)$ шешімінің γ траекториясының шектік жиыны $\bar{\gamma}$ болсын және $\{x_k^*\} \subset \bar{\gamma}, x_k^* \rightarrow x^*, k \rightarrow \infty$ делік. Онда $\bar{\gamma}$ - ның анықтамасы бойынша кез келген k үшін $\{t_{kn}\}, t_{kn} \rightarrow \infty$ тізбегі табылып, $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(t_{kn}) = x_k^*$ теңдігі орындалады.

Мына теңсіздіктерді

$$\|\varphi(\bar{t}_k) - x_k^*\| < \frac{1}{k}, \bar{t}_k > k$$

қанағаттандыратындай етіп $\bar{t}_k$ мезетін таңдайық. Онда $\bar{t}_k \rightarrow \infty$ болады да, себебі $k \rightarrow \infty$, мына теңсіздік

$$\|\varphi(\bar{t}_k) - x^*\| \leq \|\varphi(\bar{t}_k) - x_k^*\| + \|x_k^* - x^*\| < \frac{1}{k} + \|x_k^* - x^*\| \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$$

орындалады. Демек, $x^* \in \bar{\gamma}$.

2°. Шектік жиын тұтас траекториялардан тұрады, яғни егер $x^* \in \bar{\gamma}$, онда γ_{x^*} траекториясы тұтасымен $\bar{\gamma}$ -да жатады.

Шынында да, егер γ траекториясының тендеуі $x = \varphi(t, x_0)$ болып, $\lim_{n \rightarrow \infty} (t_n, x_0) = x^*$, әрі $t_n \rightarrow \infty$ болса, онда әрбір тиянақты (бекітілген) t үшін

$$\varphi(t_n + t, x_0) = \varphi(t, \varphi(t_n, x_0)) \rightarrow \varphi(t, x^*), n \rightarrow \infty$$

қатынасы орындалады. Демек, $\varphi(t, x^*) \in \bar{\gamma}$.

Басқаша сөзбен айтқанда, шектік жиын t -ның әрбір мәнінде $\varphi_t : x_0 \rightarrow \varphi(t, x_0) \in D \subset R^n$ бейнелеуіне қатысты инварианттық қасиетке ие болады.

3°. Шектік жиын бос болу үшін $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\varphi(t)\| = \infty$ теңдігінің орындалуы қажетті де жеткілікті.

Шынында да, егер бұл теңдік орындалса, шектік жиынның бос болатыны айқын. Енді шектік жиын бос болсын да, теңдікті дәлелдеу үшін ол орындалмайды деп қарсы жорық. Онда U шары: $\|x\| \leq R$ табылып, t -ның мейлінше үлкен мәндеріндегі $\varphi(t)$ траекториясының нүктелері осы шарда жататын болады, яғни $\{t_n\} (t_n \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty)$ тізбегі табылып, $|\varphi(t)| \subset U$ болады. Бұл шенелген тізбектен жинақты тізбекше бөліп алсақ, $\varphi(t)$ траекториясының $t \rightarrow +\infty$ кездегі шектік нүктесін аламыз, яғни шектік жиын бос емес. Бұл тұжырымның шартына қайшы. Демек, кері жору дұрыс емес.

4°. Шектік жиын жалғыз ғана нүктеден, оны x^* деп белгілейік, тұруы үшін $\varphi(t)$ траекториясының осы нүктеге енуі, яғни $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\varphi(t)\| = x^*$ болуы қажетті де жеткілікті.

Д Э Л Е Л Д Е У I. Теңдік орындалғанда тұжырымның дұрыстығы айдан анық. Керісінше, x^* траекторияның жалғыз шектік нүктесі болсын. Осы нүктеге траекторияның ұмтылатынын дәлелдейік. Қарсы жорып, x^* нүктесі траекторияның шегі емес дейік. Онда кез келген $\varepsilon > 0$ саны үшін $\{t_k\}, t_k \rightarrow \infty$ тізбегі табылып, траекторияның x^* нүктесінің ашық ε аймағы $U(x^*, \varepsilon)$ -қа (центрі x^* -да жататын, радиусы ε -ге тең ашық шарға) кірмейтін $\varphi(t'_k)$ нүктелері бар болады: $\varphi(t'_k) \notin U(x^*, \varepsilon)$. Екінші жағынан, x^* – шектік

нүкте болғандықтан, $\{t_k''\}, t_k'' \rightarrow \infty$ тізбегі табылып, $\varphi(t_k'') \notin U(x^*, \varepsilon)$ орындалады. Олай болса, шешім үзіліссіз функция болғандықтан, үшінші $\{t_k\}, t_k \rightarrow \infty$ тізбегі табылып, $\varphi(t_k)$ нүктелері $U(x^*, \varepsilon)$ аймағының шені болып табылатын ε сферада жатады: $\|\varphi(t_k) - x^*\| = \varepsilon$.

Онда $\{t_k\}$ тізбегінен жинақты болатын тізбекше бөліп алсақ, оның x^{**} шегі де ε сферада жатады:

$$\|x^{**} - x^*\| = \varepsilon.$$

Сонымен траекторияның x^* -дан басқа x^{**} шектік нүктесі бар болып шықты. Бұл тұжырымға қайшы. Демек, жору дұрыс емес, траектория x^* нүктесіне енеді.

Енді (1) жүйедегі теңдеулердің саны екіге тең (яғни $n=2$) болатын жағдайды жекелеп қарастырайық:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_2) \\ \frac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, x_2) \end{cases} \quad (4)$$

Жазықтықта жататын (4) жүйенің траекторияларының өзіне тән қасиеттері бар. Ол қасиеттер А. Пуанкаре* мен И. Бендиксонның** зерттеулері арқасында жүйелі теорияға айналды. Сол теориядан кейбір тұжырымдар келтірілдік.

1-ТЕОРЕМА. Егер (4) жүйенің траекториясы $t \rightarrow +\infty$ немесе $t \rightarrow -\infty$ кезде ең болмағанда өзінің бір шектік нүктесі арқылы өтсе, онда ол траектория не цикл (тұйық траектория) не тыныштық нүкте болып табылады.

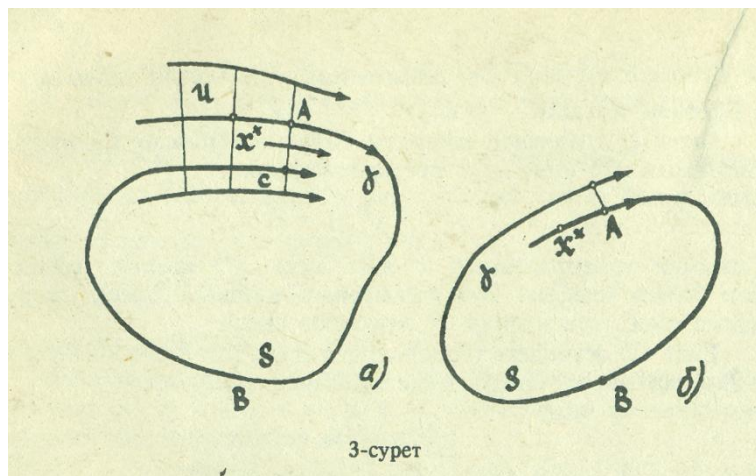
Д Э Л Е Л Д Е У І. Траекторияны γ , шектік нүктені $x^* = (x_1^*, x_2^*) \in D \subset R^2$ деп белгілейік. Анықтық үшін x^* $t \rightarrow +\infty$ кездегі шектік нүкте болсын. Егер x^* тыныштық нүктесі болса, онда бүкіл траектория (яғни тұтасымен) осы нүктеге айналады (жылдамдық нөлге тең). Айталық, x^* тыныштық нүкте болмасын. Осы нүктені қоршайтын $U(x^*)$ аймағын қарастырайық. Ол аймақ x^* нүктесін қамтитын γ_{x^*} кішкене доғасына жүргізілген екі нормалдың кесінділерімен және траекторияның екі доғасымен шектелсін (3, а-сурет).

U аймағының ішінде жататын траектория бөліктері аздап иілген параллель түзулер түрінде. Олардың бойымен өтетін қозғалыс жылдамдығы тұрақтыға жақын. Шарт бойынша γ траектория x^* нүктесі арқылы өтеді. Сонымен қатар x^* – шектік нүкте болғандықтан, t -ның (шексіз) өсу барысында траектория қайтадан U аймағын кесіп өтуі керек. Бұл кезде траекторияның тағы да x^* нүктесінен өтетінін, яғни γ тұйық траектория болатынын көрсетейік.

Кері жорып, олай емес екен делік. Онда γ траекторияның ABC доғасы нормалдың AC кесіндісімен бірігіп, қайсыбір тұйық сызық береді. Ол сызық жазықтықтың белгілі бір тұйық бөлігі S -ті қоршайды. Бұл бөлік әдебиетте "*Бендиксон қапшығы*" деген атпен белгілі. Әдетте (4) жүйенің траекторияларын зерттегенде, жазықтықтың осы ерекшелігі – кез келген тұйық сызық жазықтықты екі бөлікке бөлетіндігі пайдаланылады. (4) жүйенің сырттан ішке қарай кесіп өте алады (траекторияны $t \rightarrow +\infty$ кезде қарастырып отырмыз). Онда γ траектория C нүктесінен кейін S -тің ішінде мәңгілікке қалады. Себебі t -ның өсу барысында траектория не ABC доғасын кесіп өте алмайды (жору бойынша, траектория

өзін-өзі кесе алмайды), не AC кесіндісін (іштен сыртқа қарай) қиып өте алмайды. Онда γ траектория C нүктесінен кейін x^* нүктесіне мейлінше жақындай (ұмтыла) алмайды. Ал

***Бендиксон И. (1861-1935) – норвегиялық математик**



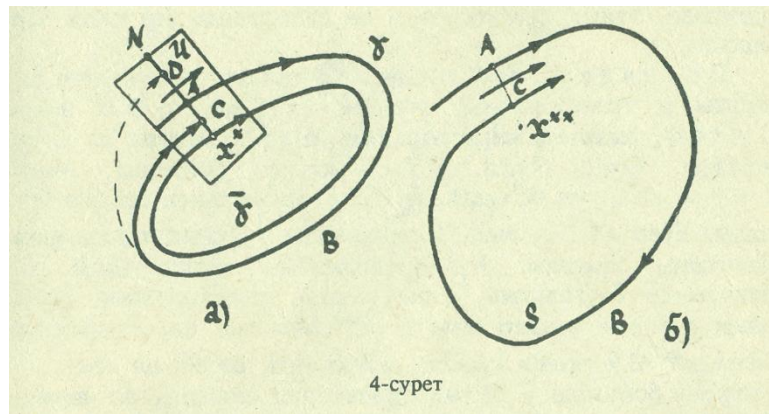
3-сурет

бұл x^* нүктенің γ -ның шектік нүктесі дегенге қайшы келеді. Егер γ траектория-ның орналасуы 3, б-суретте көрсетілгендей болып, AC кесіндісі S -тен сыртқа қарай шығатын траекториялармен қиылысатын (көрсетілген түрде) болса, онда γ траектория C нүктесінде S -тен шыққаннан кейін оған қайтадан ешқашан ене алмайды. Сондықтан ол x^* нүктесіне мейлінше жақындай алмайды. Бұл қайшылықтар жорудың дұрыс емес, теореманың дұрыс екендігіне көзімізді жеткізеді.

ЛЕММА (4) жүйенің γ траекториясының $t \rightarrow +\infty$ кезде шектік нүктесі бар болсын және ол нүкте қандайда бір $\bar{\gamma}$ тұйық траекториясында жатсын. Онда не $\gamma = \bar{\gamma}$, не γ траекториясы $t \rightarrow \infty$ кезде $\bar{\gamma}$ -ға ширатыла жақындайтын (ұмтылатын) болады.

ДЕФИНИЦИЯ. Шектік жиынның 2°-қасиеті бойынша $\bar{\gamma}$ траектория тұтасымен γ траекторияның шектік жиынында жатады. Қандай да бір $x^* \in \bar{\gamma}$ нүктесінің бекітілген кішкене $U(x^*)$ аймағын қарастыралық (4-сурет). x^* шектік нүкте болғандықтан, t мейлінше өскенде, γ траектория U аймағын кесіп өтуі керек. Траекториялар ол аймақта "параллель дерлік" сызықтар болатындықтан, γ траектория оған x^* нүктесінде жүргізілген Nx^* нормалын қияды. Егер қиылысу нүктесі x^* болатын болса, онда $\gamma = \bar{\gamma}$. Айталық, қиылысу $\bar{\gamma}$ траекториясының сыртында жататын A нүктесінде болсын (4,а-сурет).

Егер A x^* -қа мейлінше жақын орналасса, онда шешімнің бастапқы берілгендерден үзіліссіз тәуелділігі бойынша ([12], VIII тарау, § 3), γ -ның бір толық оралу периодына тең T уақытта γ траектория қайтадан U -ға кіру керек. γ траекториясының Nx^* түзуімен A -дан кейінгі қиылысу нүктесін C деп белгілейік. A нүктесі x^* -қа мейлінше жақын болса, γ траекторияның AC доғасы тұтасынан $\bar{\gamma}$ циклін көмкеретін өте тар (жіңішке) жолақта орналасады. Әлбетте, C мен A нүктелерінен x^* нүктесіне дейінгі



қашықтықтар, ([12], VII тарау, § 2) $\rho(C; x^*) < \rho(A; x^*)$ теңсіздігін қанағаттандырады. Шынында да, егер $A = C$ болса, онда γ цикл болар еді де, x^* нүктесіне жақындай алмас еді. Ал егер де γ 4,а-суретте үзік сызық арқылы көрсетілгендей жол болса, онда ол $ABDA$ "қапшығының" ішіне ене алмайды және сол себепті тағы да x^* нүктесіне жақындай алмайды. Траекторияны C нүктесінен әрі қарай ұзарта отырып, $\bar{\gamma}$ траекториясын бір айналып өткеннен кейін, Nx^* түзуімен келесі қиылысу нүктесін табамыз, әрі қарай тағы сол сияқты. Нәтижесінде қиылысу нүктелерінің тізбегін аламыз. Ол тізбек x^* нүктесіне ұмтылады, себебі x^* – γ траекторияның шектік нүктесі. Ал онда шешімнің бастапқы берілгендерден үзіліссіз тәуелділігі бойынша γ траектория $\bar{\gamma}$ -ге біркалыпты түрде оратылады (орағыта ұмтылады). Лемма дәлелденді.

2–ТЕОРЕМА. (4) жүйенің тыныштық нүктелері жатпайтын шенелген тұйық облыс $\bar{D}$ берілсін. $t = 0$ кезде D -да басталатын барлық траекториялар, кейін де $t > 0$ кезде) облыстың ішінде қалсын. Онда мұндай траекториялар цикл болады немесе $t \rightarrow +\infty$ кезде қандай да бір циклге ширатыла ұмтылатын болады. Яғни теореманың шарттары орындалғанда, тұйық $\bar{D}$ облысында ең болмағанда бір цикл бар болады.

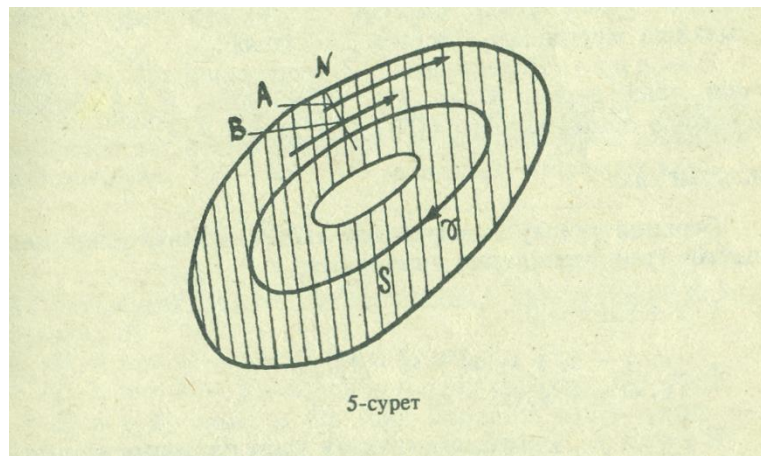
Д Э Л Е Л Д Е У І. $\bar{D}$ облысында басталатын кез келген оң жарты γ траекторияны, яғни $x = x(t, x_0)$, $x_0 \in \bar{D}$ және $0 \leq t < \infty$, сызығын қарастырайық. Шарт бойынша ол $\bar{D}$ -да жатады. Олай болса, §3, 3°-қасиет бойынша, оның $t \rightarrow +\infty$ кезде ең болмағанда бір x^* шектік нүктесі бар болады. Егер $x^* \in \gamma$, онда 1-теоремадан γ тұйық траектория болатыны шығады. Бұлай болмасын делік. Онда x^* нүктесінде басталатын $\bar{\gamma}$ оң жарты траекториясын және оның $t \rightarrow +\infty$ кездегі шектік x^{**} нүктесін қарастырамыз. Бізге $x^{**} \in \bar{\gamma}$ екенін көрсету жеткілікті, себебі ол кезде 1-теорема бойынша $\bar{\gamma}$ тұйық траектория екендігі, ал лемма бойынша γ -ның $\bar{\gamma}$ -ға ширатыла ұмтылатыны алынады. Айталық, $x^{**} \notin \bar{\gamma}$ болсын, x^{**} нүктесінің кішкене аймағын қарастырайық (4,б-сурет). A және C – $\bar{\gamma}$ траекториясының x^{**} нүктесінде $\gamma_{x^{**}}$ оң жарты траекториясына жүргізілген нормалды қиып өтетін екі нүктесі болсын. C "қапшығының" шекарасы болатын $ABCA$ сызығының CA кесіндісін траекториялар сырттан ішке қарай 4, а-суреттегідей етіп қиып өтсін (4,б-сурет). §3-тегі 2°-қасиет бойынша $\bar{\gamma}$ -ның барлық нүктесі γ үшін шектік болғандықтан, γ белгілі бір кезде C нүктесінен мейлінше аз қашықтықта болады және сондықтан S "қапшығының" ішіне енеді. Ал S -тың ішіне кіргеннен кейін одан ешқашан шыға алмайды, демек A нүктесіне ендігәрі жақындай алмайды. Бұл A нүктесі – γ үшін шектік нүкте

дегенге қайшы. Траекториялар CA кесіндісін "қапшықтың" ішінен сыртына қарай қиып өтетін жағдай да дәл осылай қарастырылады. Теорема дәлелденді.

3–ТЕОРЕМА. Тұйық γ траекториясының қандай да бір аймағында басқа тұйық траекториялар болмасын. Онда γ -ға мейлінше жақын нүктелерден басталатын барлық траекториялар $t \rightarrow +\infty$ немесе $t \rightarrow -\infty$ кезде γ -ға ширатыла жақындайтын болады.

Айта кететін жай, γ -ның ішінде орналасқан траекториялардың барлығы бірдей γ -ға не $t \rightarrow +\infty$, не $t \rightarrow -\infty$ кезде жақындайды. Сыртта орналасатын траекториялар да дәл осындай қасиетке ие.

Д Э Л Е Л Д Е У I. γ траекторияда тыныштық нүктелері жатпайтындықтан бұл траекторияны қамтитын, ішінде тыныштық нүктелері мен циклдер болмайтын тар жолақ (ені тар белдеу) табуға болады (5-сурет). γ -ға қандай да бір $x^* \in \gamma$ нүктесінде түсірілген нормалдың мейлінше аз тұрақты NN кесіндісін алайық.



Әлбетте, γ -ға мейлінше жақын орналасқан нүктелерден басталатын траекториялар кейін де осы траекторияға мейлінше жақын болады. Со-ндықтан олар NN кесіндісін қиып өтеді. Демек, NN кесіндісінің x^* нүктесіне жақын болатын нүктелерінен өтетін траекторияларды қарастырсақ болғаны. NN кесіндісінің бір A нүктесінен өтетін траекторияны қарастырайық. Осы траекторияның кесіндісімен келесі қиылысу нүктесі B болсын. Онда $B \neq A$ болады. Анықтық үшін x^* нүктесінен B және A нүктелеріне дейінгі қашықтықтар $\rho(B, x^*) < \rho(A, x^*)$ теңсіздігін қанағаттан-дырсын. Іш жағынан γ циклімен, ал сырт жағынан AB доғасымен және BA кесіндісімен шенелген сақина бейнелі S "қапшықты" қарастырайық. Онда AB траекториясының NN кесіндісімен келесі қиылысу нүктесі x^*B кесіндісінде жатады. Оны C әрпімен белгілейік. Траекторияның NN нормалымен онан кейінгі қиылысуы x^*C кесіндісінде өтеді т.с.с. Қиылысу нүктелерінен тұратын тізбек x^* -ке жинақталу керек. Өйтпеген күнде бұл тізбектің шектік нүктесі арқылы γ -дан басқа цикл өткен болар еді. Демек, қарастырылып отырған траектория γ -ға ширатылады. γ -дан сырт жақын жерден басталатын басқа траекториялар да аталған траекториямен сырттай қысылғандықтан, $t \rightarrow +\infty$ кезде γ -ға сырттай ширатыла түсетін болады. Егер де $\rho(B, x^*) < \rho(A, x^*)$ болса, онда жоғарыдағы пайымдауларды t -ның орнына $-t$ -ны қойып қайталаса болғаны. Сондықтан бұл жағдайда барлық траекториялар γ -ға $t \rightarrow -\infty$ кезде ширатылады. S жолағының γ -ның ішінде жататын бөлігін қарастыру да дәл осылайша жүргізіледі. Теорема дәлелденді.

Е С К Е Р Т У. Дәлелденген 1-3 теоремалар тек (4) жүйе үшін ғана дұрыс. Олар (1) жүйе үшін $n \geq 3$ болған жағдайда орындалмайды ([4], VII тарау, § 54).

Ж А Т Т Ы Ы У Л А Р

Берілген теңдеу мен жүйедегі тыныштық нүктелерін және шектік траекторияларын анықтаңыз:

1. $\ddot{x} + \sin x = 0$.

2.
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 + x_1(x_1^2 + x_2^2) \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2(x_1^2 + x_2^2 - 1) \end{cases}$$

Н Ұ С Қ А У. Жүйені интегралдау үшін полярлық координатқа көшкен қолайлы.